第２問　(配点　25)

a を定数とし，x の２次関数

$$y = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6a - 36 \quad \cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2 - \boxed{\text{ウ}}\,a - \boxed{\text{エオ}}\right)$$

である。G と y 軸との交点の y 座標を p とする。

(1)　$p = -27$ のとき，a の値は $a = \boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キク}}$ である。$a = \boxed{\text{カ}}$ のときの ① のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ケ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{コ}}$ だけ平行移動すると，$a = \boxed{\text{キク}}$ のときの ① のグラフに一致する。

(2)　下の $\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$ には，次の⓪～③のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $>$　　① $<$　　② $\geqq$　　③ $\leqq$

G が x 軸と共有点を持つような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{\text{サシ}}\ \boxed{\text{ス}}\ a\ \boxed{\text{セ}}\ \boxed{\text{ソ}} \quad \cdots\cdots ②$$

である。a が ② の範囲にあるとき，p は，$a = \boxed{\text{タ}}$ で最小値 $\boxed{\text{チツテ}}$ をとり，$a = \boxed{\text{ト}}$ で最大値 $\boxed{\text{ナニ}}$ をとる。

G が x 軸と共有点を持ち，さらにそのすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{\text{ヌネ}}\ \boxed{\text{ノ}}\ a\ \boxed{\text{ハ}}\ \frac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

第３問 （配点　30）

$\triangle$ABC は，AB $= 4$，BC $= 2$，$\cos\angle$ABC $= \dfrac{1}{4}$ を満たすとする。このとき

$$\mathrm{CA} = \boxed{\text{ア}},\quad \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。$\angle$ABC の二等分線と $\angle$BAC の二等分線の交点を D，直線 BD と辺 AC の交点を E，直線 BD と円 O との交点で B と異なる交点を F とする。

(1)　このとき

$$\mathrm{AE} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}},\quad \mathrm{BE} = \frac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \mathrm{BD} = \frac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

となる。

(2)　$\triangle$EBC の面積は $\triangle$EAF の面積の $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ 倍である。

(3)　角度に注目すると，線分 FA，FC，FD の関係で正しいのは $\boxed{\text{ネ}}$ であることが分かる。

$\boxed{\text{ネ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

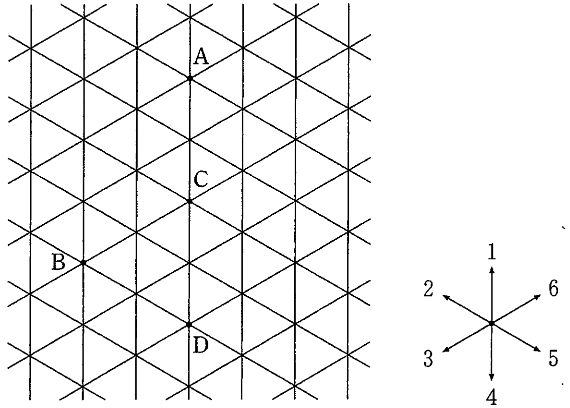
⓪　FA $<$ FC $=$ FD　　①　FA $=$ FC $<$ FD

②　FC $<$ FA $=$ FD　　③　FD $<$ FC $<$ FA

④　FA $=$ FC $=$ FD　　⑤　FD $<$ FC $=$ FA

第４問 （配点　25）

下の図は，ある町の街路図の一部である。



ある人が，交差点 A から出発し，次の規則に従って，交差点から隣の交差点への移動を繰り返す。

①　街路上のみを移動する。

②　出発前にサイコロを投げ，出た目に応じて上図の 1 ～ 6 の矢印の方向の隣の交差点に移動する。

③　交差点に達したら，再びサイコロを投げ，出た目に応じて図の 1 ～ 6 の矢印の方向の隣の交差点に移動する。（一度通った道を引き返すこともできる。）

④　交差点に達するたびに，③と同じことを繰り返す。

(1) 交差点Aを出発し，4回移動して交差点Bにいる移動の仕方について考える。この場合，3の矢印の方向の移動と4の矢印の方向の移動をそれぞれ2回ずつ行うので，このような移動の仕方は $\boxed{ア}$ 通りある。

(2) 交差点Aを出発し，3回移動して交差点Cにいる移動の仕方は $\boxed{イ}$ 通りある。

(3) 交差点Aを出発し，6回移動することを考える。このとき，交差点Aを出発し，3回の移動が終わった時点で交差点Cにいて，次に3回移動して交差点Dにいる移動の仕方は $\boxed{ウエ}$ 通りあり，その確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキクケ}}$ である。

(4) 交差点Aを出発し，6回移動して交差点Dにいる移動の仕方について考える。

- 1の矢印の向きの移動を含むものは $\boxed{コ}$ 通りある。
- 2の矢印の向きの移動を含むものは $\boxed{サシ}$ 通りある。
- 6の矢印の向きの移動を含むものも $\boxed{サシ}$ 通りある。
- 上記3つ以外の場合，4の矢印の向きの移動は $\boxed{ス}$ 回だけに決まるので，移動の仕方は $\boxed{セソ}$ 通りある。

よって，交差点Aを出発し，6回移動して交差点Dにいる移動の仕方は $\boxed{タチツ}$ 通りある。

数学Ⅱ・数学B

問　題	選 択 方 法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	
第6問	

第２問　標準　《２次関数，平行移動，最大・最小，２次不等式》

$$y=x^2+2ax+3a^2-6a-36 \quad \cdots\cdots ①$$
$$=(x+a)^2+2a^2-6a-36$$

より，頂点の座標は

$$(\boxed{-}a,\ \boxed{2}a^2-\boxed{6}a-\boxed{36}) \quad \cdots\cdots ③$$

(1)　①の右辺を $f(x)$ とおくと，条件より

$$p=f(0)=3a^2-6a-36=-27$$
$$3a^2-6a-9=0 \qquad a^2-2a-3=0$$
$$(a-3)(a+1)=0 \qquad \therefore\ a=\boxed{3},\ \boxed{-1}$$

$a=3$ のとき，③より G の頂点の座標は　$(-3,\ -36)$

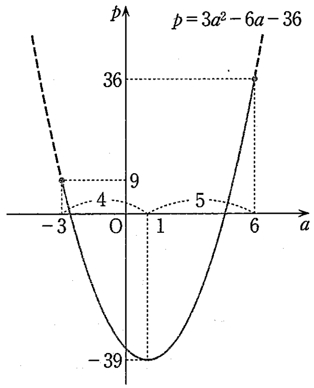
同様に，$a=-1$ のとき，G の頂点の座標は　$(1,\ -28)$

ゆえに，$a=3$ のときのグラフを x 軸方向に $1-(-3)=\boxed{4}$，y 軸方向に $-28-(-36)=\boxed{8}$ だけ平行移動すると，$a=-1$ のときの①のグラフに一致する。

(2)　G は下に凸の放物線だから，G が x 軸と共有点を持つための条件は，③より

$$2a^2-6a-36 \leqq 0$$
$$a^2-3a-18 \leqq 0$$
$$(a+3)(a-6) \leqq 0$$
$$\therefore\ \boxed{-3} \leqq a \leqq \boxed{6} \quad \cdots\cdots ②$$

（$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ はいずれも $\boxed{③}$）



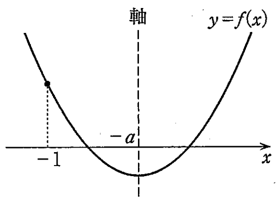
また

$$p=f(0)=3a^2-6a-36=3(a-1)^2-39$$

より，p のグラフは右図のようになる。

ゆえに，a が②の範囲にあるとき，p は $a=\boxed{1}$ で最小値 $\boxed{-39}$ をとり，$a=\boxed{6}$ で最大値 $\boxed{36}$ をとる。

G が x 軸と共有点を持つとき，a は②を満たさねばならない。さらに，すべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるのは，G のグラフが右図のようになったときである。そのための条件は



$$\begin{cases} f(-1)=3a^2-8a-35>0 & \cdots\cdots ④ \\ 軸の条件：-a>-1 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

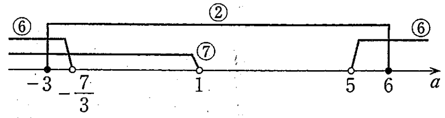
④より

$$(3a+7)(a-5)>0$$
$$\therefore\ a<-\frac{7}{3},\quad 5<a \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤より　$a<1$　$\cdots\cdots$⑦

求める a の値の範囲は，②，⑥，⑦より

$$\boxed{-3} \leqq a < \frac{\boxed{-7}}{\boxed{3}} \quad（\boxed{ノ} は \boxed{③}，\boxed{ハ} は \boxed{①}）$$



解説

(1)　y 軸との交点の y 座標は，$x=0$ のときの関数値である。

放物線の平行移動は，頂点の移動に着目するととらえやすい。

(2)　G は下に凸の放物線だから，G が x 軸と共有点を持つのは，頂点の y 座標が0以下のときである。

$p=3a^2-6a-36$ が最大，最小になる a の値は，a を変数と見たときの p のグラフからわかる。a は $-3 \leqq a \leqq 6$ の範囲に限定されるから，その範囲における p のグラフに着目すること。

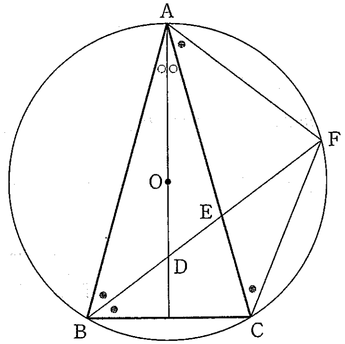
G と x 軸のすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるための条件は，共有点の x 座標を実際に求めたりするのではなく，G のグラフをもとに調べること。G がどのような放物線であれば，x 軸との共有点の x 座標がすべて -1 より大きくなるかを考えるのである。G が下に凸であることを考慮すると，解法のようなグラフになればよいことがわかる。次には，G がそのようなグラフになるための条件を調べる。グラフをよく見れば，②に加えて，$f(-1)>0$ と，軸の x 座標が -1 より大きいことが条件になることがわかる。

このように，グラフを使って判断することが有効になることが多い。２次関数の問題では特にそれが言える。

第3問 標準 《三角比，平面図形（円，角の二等分線）》

△ABC に対する余弦定理より

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\angle ABC$$
$$= 4^2 + 2^2 - 2\cdot 4\cdot 2\cdot \frac{1}{4}$$
$$= 16 + 4 - 4 = 16$$
$$\therefore\ CA = \boxed{4}$$



同じく△ABC に対する余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2AB\cdot CA\cos\angle BAC$$
$$2^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cos\angle BAC$$
$$\therefore\ \cos\angle BAC = \frac{4^2+4^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 4} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{8}}$$

$\sin\angle BAC > 0$ より

$$\sin\angle BAC = \sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{8}}$$

△ABC の外接円の半径を R とすると，△ABC に対する正弦定理より

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC} \qquad \therefore\ R = \frac{2}{2\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{\boxed{8}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{15}}$$

(1) 三角形の角の二等分線の性質より

$$AE : EC = BA : BC = 2 : 1$$
$$\therefore\ AE = \frac{2}{2+1}AC = \frac{2}{3}\cdot 4 = \frac{\boxed{8}}{\boxed{3}}$$

△ABE に対する余弦定理より

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB\cdot AE\cos\angle BAE$$
$$= 4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2\cdot 4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8}$$
$$= 16 + \frac{64}{9} - \frac{56}{3} = \frac{40}{9}$$
$$\therefore\ BE = \sqrt{\frac{40}{9}} = \frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{3}}$$

三角形の角の二等分線の性質より

$$BD : DE = AB : AE = 4 : \frac{8}{3} = 3 : 2$$
$$\therefore\ BD = \frac{3}{3+2}BE = \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{5}}$$

(2) 円周角の性質より

$$\angle BCE = \angle AFE,\quad \angle CBE = \angle FAE$$

であるから，△EBC∽△EAF である。またその相似比は

$$BE : AE = \frac{2\sqrt{10}}{3} : \frac{8}{3} = \sqrt{10} : 4$$

ゆえに

$$\triangle EBC = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2\triangle EAF = \frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}\triangle EAF$$

(3) $\angle ABF = \angle CBF$ より

$$\overset{\frown}{FA} = \overset{\frown}{FC} \qquad \therefore\ FA = FC \quad \cdots\cdots①$$

また

$$\angle BAD = \angle CAD = \alpha,\quad \angle ABF = \angle FBC = \beta$$

とおくと

$$\angle FAD = \angle FAC + \angle CAD$$
$$= \angle FBC + \angle CAD \quad (\text{円周角の性質})$$
$$= \beta + \alpha$$
$$\angle FDA = \angle BAD + \angle ABD \quad (\text{三角形の外角の性質})$$
$$= \alpha + \beta$$

ゆえに

$$\angle FAD = \angle FDA \qquad \therefore\ FA = FD \quad \cdots\cdots②$$

①，②より

$$FA = FC = FD \quad (\boxed{④})$$

別解 (3) FA，FC，FD の長さを直接求めて解くこともできる。

まず FA は，△FAE∽△CBE より

$$FA : CB = AE : BE$$
$$FA : 2 = \frac{8}{3} : \frac{2\sqrt{10}}{3} = 4 : \sqrt{10}$$
$$\therefore\ FA = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

FC は，△CFE∽△BAE より

$$FC : AB = CE : BE$$

$$FC : 4 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) : \frac{2\sqrt{10}}{3} = 2 : \sqrt{10}$$

$$\therefore\quad FC = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

次に，FD を求めるために，まず FE を求める。△CFE∽△BAE より

$$FE : AE = CE : BE$$

$$FE : \frac{8}{3} = 2 : \sqrt{10}$$

$$\therefore\quad FE = \frac{16}{3\sqrt{10}}$$

また

$$ED = BE - BD = \frac{2\sqrt{10}}{3} - \frac{2\sqrt{10}}{5} = \frac{4\sqrt{10}}{15}$$

よって

$$FD = FE + ED = \frac{16}{3\sqrt{10}} + \frac{4\sqrt{10}}{15} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

以上より　　FA＝FC＝FD

解説

正弦定理，余弦定理は，三角比の基本公式である。正確に覚えておくこと。

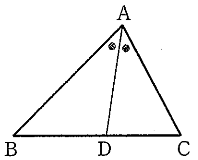
(1)　AE は三角形の角の二等分線の性質で求まる。

ポイント　角の二等分線の性質

図において，∠BAD＝∠CAD であるとき

AB：AC＝BD：DC

が成り立つ。



BE は余弦定理で求まる。BD は角の二等分線の性質で求まる。

(2)　円周角の性質（共通の弧に対する円周角は等しい）より，△EBC と△EAF の内角が等しくなり，両者は相似である。また，相似図形においては，面積比は相似比の2乗に等しい。

(3)　FA＝FC は，∠ABF＝∠CBF より簡単にわかる。なお，これを示すのに，解法では「円周角が等しければ弧の長さが等しく（円周角の性質の逆），弧の長さが等しければ弦の長さが等しい」という考えを用いている。この部分は，「円周角が等しいことより∠FAC＝∠FCA となり，△FAC は二等辺三角形である。したがって FA＝FC となる」という考え方でもよい。

FA と FD は，どういう方法で比較できるか迷うところであろう。「角度に注目する」とヒントがあるから∠FAD と∠FDA の大小を調べてみよう，と発想できれば結論に一歩近づく。解法にあるように，円周角の性質や三角形の外角の性質を用いると，∠FAD，∠FDA とも，図に記入している角記号を用いれば，○と●の和となる。つまり，∠FAD＝∠FDA である。そこから△FAD は二等辺三角形となり，FA＝FD とわかる。

なお，〔別解〕のように，FA，FC，FD の長さを直接求めることも可能である。

第4問 標準 《場合の数，確率》

(1) 「3」2個と「4」2個を並べる並べ方が問われている。「3」の入る位置（何回目に「3」の目が出るか）に着目することにより，そのような並べ方（移動の仕方）は

$$ {}_4C_2=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=\boxed{6}\ (\text{通り}) $$

(2) Aから3回でCに到達するのは，3，4，5の方向に1回ずつ進んだときである（3，4，5の順序は自由）。したがって，そのような移動の仕方は「3」，「4」，「5」を並べる順列の数だけあり

$$ 3!=\boxed{6}\ (\text{通り}) $$

(3) 3回の移動で，A→C が6通りだから，C→D も6通りである。よって，条件を満たす移動の仕方は

$$ 6\times 6=\boxed{36}\ (\text{通り}) $$

また，サイコロの目の出方の総数は 6^6 だから，求める確率は

$$ \frac{36}{6^6}=\frac{1}{6^4}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{1296}} $$

(4) (a) 「1」を含むものは，「1」1回と「4」5回しかない（順序は自由）。したがって，そのような移動の仕方は，6回の移動の中で「1」の入る位置に着目して

$$ {}_6C_1=\boxed{6}\ (\text{通り}) $$

(b) 「2」を含むものは，「2」1回，「5」1回，「4」4回しかない（順序は自由）。「2」の入る位置は ${}_6C_1=6$ 通りあり，そのそれぞれについて「5」の入る位置は ${}_5C_1=5$ 通りあるから，そのような移動の仕方は

$$ 6\times 5=\boxed{30}\ (\text{通り}) $$

(c) 「6」を含むものも，まったく同様に30通りである。

(d) 上記以外の場合は，「4」$\boxed{2}$回，「3」2回，「5」2回しかない（順序は自由）。「4」の入る位置は ${}_6C_2$ 通りあり，そのそれぞれについて「3」の入る位置は ${}_4C_2$ 通りあるから，そのような移動の仕方は

$$ {}_6C_2\cdot {}_4C_2=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=\boxed{90}\ (\text{通り}) $$

よって，Aを出発し，6回移動してDにいる移動の仕方は

$$ 6+30+30+90=\boxed{156}\ (\text{通り}) $$

別解 「同じものを含む順列」の考え方を使うと，次のように計算することができる。

(1)は，「3」2個と「4」2個を並べるから

$$ \frac{4!}{2!2!}=6\ (\text{通り}) $$

(4)(a)は，「1」1個と「4」5個を並べるから

$$ \frac{6!}{1!5!}=6\ (\text{通り}) $$

(b)は，「2」1個，「5」1個，「4」4個を並べるから

$$ \frac{6!}{1!1!4!}=30\ (\text{通り}) $$

(d)は，「4」2個，「3」2個，「5」2個を並べるから

$$ \frac{6!}{2!2!2!}=90\ (\text{通り}) $$

解説

(1) 「3」2個と「4」2個の合計4個を並べる並べ方の数が問われている。下のように，すべての並べ方を列挙してみるのも一つの方法である（漏れたり重複したりしないよう，辞書式に並べるのがコツ）。

3344，3434，3443，4334，4343，4433 ⟹ 6通り

ただ，こうした方法は一般には大変な作業であり，間違いも犯しやすいので，計算で求めるのがよい。

4個並んでいるうちのどこに「3」を入れるかと考えればよいのである。「3」の入る場所は ${}_4C_2$ 通りだけあることがわかる。「3」の位置が決まれば「4」の位置はおのずと1通りに決まるのである。

また，〔別解〕のように，同じものを含む順列という考え方を使うと，さらに容易に計算することができる（(1)では大した効果を発揮しないが，(4)の(d)などでは効率的である）。

> **ポイント** 同じものを含む順列
>
> p 個の同じもの，q 個の同じもの，…，r 個の同じもの（合計 n 個）を1列に並べる順列の総数は
>
> $$ \frac{n!}{p!q!\cdots r!}\ (\text{通り}) $$

(2) 「1」，「2」，「6」が1回でも含まれると，3回でCに到達できないことはすぐにわかる。したがって，「3」，「4」，「5」しか含まれてはいけないが，「4」だけだと3回でCには来ない（通りすぎてしまう）。また，左右方向の移動量は0だから，「3」と「5」は同数含まれないといけない。こうして調べていくと，「3」，「4」，「5」を1回ずつ含む場合だけだとわかる。

(3) A→CとC→Dは，条件が変わらないから，移動の仕方は同数ある。

(4) 交差点間の距離を1とし，縦方向の移動量だけに着目して，下方向を正，上方向を負と考える。すると，「1」の移動量は-1，「2」と「6」の移動量は$-\frac{1}{2}$，「3」と「5」の移動量は$+\frac{1}{2}$，「4」の移動量は$+1$となる。また，A→Dは$+4$の移動量に相当する。

(a) 「1」が含まれると，残り5回で$+5$だけ移動しないといけない。それには$+1$の移動を5回行うしかない。

(b) 「2」が含まれると，残り5回で$4+\frac{1}{2}$を移動しないといけない。それには$+1$の移動を4回と$+\frac{1}{2}$の移動を1回行うしかない。しかも，左右の移動量が0であることから，$+\frac{1}{2}$は「5」に限られる。

(d) 「3」,「4」,「5」だけだと，$+\frac{1}{2}$と$+1$を6個組み合わせて$+4$を作ることになる。$+\frac{1}{2}$をk個，$+1$を$6-k$個含むとすると

$$\frac{1}{2}k+1\cdot(6-k)=4 \qquad \therefore \quad k=4$$

しかも，左右の移動量が0だから，「3」と「5」は同数でなければならない。これで，「3」と「5」が2個ずつ，「4」が2個と決まる。
もちろん，実際に解くときには，このような厳密な計算をする必要はなく，街路図をなぞっているうちに，「3」,「4」,「5」が2回ずつ出たときだけだとわかるだろう。

数学Ⅱ・数学B 本試験

問題番号(配点)	解答記号	正解	配点	チェック
第1問 (30)	$-\frac{ア}{イ}$	$-\frac{3}{4}$	2	
	ウp+エq	$3p+4q$	2	
	|オp−カq|	$\|4p-3q\|$	2	
	キ	2	3	
	ク，ケ，コ	2，1，1	2	
	サ，シ，ス	4，2，4	2	
	セ	④	2	
	ソ	3	1	
	タ	8	1	
	$\frac{チ}{ツ}$	$\frac{2}{3}$	1	
	テ	1	1	
	ト	0	1	
	ナ	1	1	
	ニ	2	1	
	$\frac{ヌ}{ネ}$	$\frac{3}{2}$	1	
	ノハ	27	2	
	ヒ	5	2	
	フ	1	2	
	ヘ	6	1	

問題番号(配点)	解答記号	正解	配点	チェック
第2問 (30)	ア$x^{イ}$	$3x^2$	2	
	ウ	0	2	
	エ	①	3	
	オ	3	3	
	カキ，ク	−1，1	3	
	ケb^2−コ	$3b^2-3$	2	
	サb^3−シb^2+1	$2b^3-3b^2+1$	2	
	ス，$\frac{セソ}{タ}$	1，$\frac{-1}{2}$	3	
	$\frac{チツ}{テ}x+\frac{ト}{ナ}$	$\frac{-9}{4}x+\frac{1}{4}$	3	
	ニx^2−ヌx	$2x^2-4x$	3	
	ネノ	11	4	